

No. 149

APPROCHE DE LA METHODE ADJOINTE ET  
APPLICATION A UN MODELE SIMPLE

par

Jacques Ambühl, Genève

Septembre 1988

Méthodes numériques  
Prévisions numériques

518  
551.509.313

**Arbeitsberichte der Schweizerischen Meteorologischen Anstalt**  
**Rapports de travail de l'Institut Suisse de Météorologie**  
**Rapporti di lavoro dell'Istituto Svizzero di Meteorologia**  
**Working Reports of the Swiss Meteorological Institute**



No. 149

APPROCHE DE LA METHODE ADJOINTE ET  
APPLICATION A UN MODELE SIMPLE

par

Jacques Ambühl, Genève

Septembre 1988

Méthodes numériques  
Prévisions numériques

518  
551.509.313

Résumé

L'étude de la méthode dite du modèle adjoint est l'objet du présent travail. Il comprend une approche théorique, inspirée par les publications mentionnées dans la bibliographie, et pratique, avec la construction d'un dispositif comprenant un mini modèle barotrope, son adjoint et un réseau simulé d'observation. Quelques résultats de simulation obtenus à l'aide de ce dispositif sont présentés, accompagnés de réflexions relatives aux possibilités de développement et d'application de la méthode adjointe.

### Zusammenfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist das Studium der Methode des sogenannten adjungierten Modells. Einerseits beinhaltet die Untersuchung eine theoretische, von den im Literaturverzeichnis aufgeführten Publikationen inspirierte Annäherung an das Problem. Andererseits wird das Problem praktisch angegangen durch den Aufbau einer Versuchseinrichtung bestehend aus einem minimalen barotropen Modell, dessen adjungiertem Modell und einem simulierten Satz von Beobachtungen. Es werden einige mit Hilfe dieser Versuchseinrichtung erzielte Resultate vorgestellt. Dazu kommen Gedanken über die Möglichkeiten der Entwicklung und Anwendung der Methode des adjungierten Modells.

### Riassunto

Lo scopo del presente lavoro è lo studio del cosiddetto "metodo del modello aggiunto". La ricerca comprende un approccio teorico, ispirato alle fonti bibliografiche menzionate, e una parte pratica realizzata con la costruzione di un dispositivo comprendente un mini modello barotropico, il suo "modello aggiunto" e una rete di osservazioni simulate. Vengono così presentati alcuni risultati delle simulazioni ottenute con l'aiuto di questo dispositivo, accompagnate da considerazioni relative alla possibilità di sviluppo e di applicazione del "metodo del modello aggiunto".

### Summary

The study of the so-called "Adjoint model method" is the subject of this note. It comprises a theoretical approach, inspired by the publications mentioned in the list of references, and a practical part made up of a very simple barotropic model, its adjoint and a fictitious observing network. Some results obtained by this system are presented together with considerations about the possibilities of development and application of the method.

## Table des matières

### Introduction

I	Formulation du problème	2
II	Espace de Hilbert. Gradient. Opérateur Adjoint	5
III	Le modèle discrétisé	7
IV	Le modèle adjoint	9
V	Application: l'équation de vorticité barotrope	15
VI	La prise en compte des observations	21
VII	Optimisation	24
VIII	Simulation	26
IX	Perspectives - Conclusion	31
X	Bibliographie	33

## Introduction.

L'analyse est l'opération au cours de laquelle est élaborée, à partir de données d'observation, la condition initiale livrée à un modèle de prévision numérique. Un bon nombre de méthodes ont été développées à cette fin :

- . moindres carrés, ajustement optimal,
- . méthodes statistiques, interpolation optimale essentiellement,
- . méthodes variationnelles.

La majorité de ces méthodes relève, à un niveau d'abstraction suffisant, d'un principe optimal le plus souvent exprimé sous forme variationnelle.

La méthode adjointe est formulée dans le cadre des théories du contrôle optimal et du calcul variationnel. Elle est spatio-temporelle, par l'extension géographique du réseau d'observation d'une part, grâce d'autre part au fait que les observations sont intégrées au cours d'un intervalle durant lequel leur évolution est prise en compte.

Jean Quiby, Chef de la section de météorologie numérique de la Division de la recherche et des applications, m'a demandé, en été 1986, de bien vouloir étudier cette méthode nouvelle.

Je l'ai fait en basant essentiellement mon travail sur l'étude des publications de Messieurs Tallagrand et Courtier qui sont véritablement, à ma connaissance, les initiateurs de l'application des techniques adjointes à l'analyse météorologique. Outre la lecture des publications disponibles à l'époque et considérant que l'exercice pratique personnel est le meilleur moyen d'assimiler une matière nouvelle, j'ai développé un mini modèle barotrope, son adjoint et un réseau simulé d'observation.

L'ensemble de ce travail, réalisé dans un contexte relativement solitaire, est présenté ci-après.

## I. Formulation du problème.

Considérons un modèle numérique de prévision météorologique représenté par l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f(z) \quad (1)$$

$f$  est un opérateur non-linéaire contenant des produits, des dérivées partielles, éventuellement des intégrales spatiales.

Les fonctions  $z$  solutions de (1) sont définies sur un domaine d'intégration fermé  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Ces fonctions sont infiniment différentiables ( du moins sur tout ouvert de  $\Omega$  ) et forment un espace vectoriel topologique, noté  $H(\Omega)$ , appelé espace de Hilbert. Un certain nombre de propriétés de ces espaces sont présentées au paragraphe II.

L'intégration du modèle numérique a lieu à partir d'un instant  $t_0$  en lequel une condition initiale  $z(t_0) = z_0 \in H(\Omega)$  doit être spécifiée.

Tout le problème de l'analyse, en météorologie, revient à construire  $z_0$ .

Le domaine  $\Omega$  d'intégration est l'image d'un domaine géographique  $O$  dans lequel chaque point est repéré par ses coordonnées géographiques  $x$  et  $y$  et sur lequel un champ météorologique  $Z$  évolue en fonction du temps selon la loi physique modélisée par l'équation (1).

Exemple :

- .  $O$  peut être un domaine géographique rectangulaire de 5000 x 2500 km. de côté.
- .  $Z$  le géopotential 500 hpa. sur ce domaine.
- . (1) l'équation de vorticité.

Considérons un dispositif de mesure ( technologique, non spécifié maintenant ) permettant d'évaluer "l'écart"   un instant donné  $t \geq t_0$  entre le champ prévu par le modèle à cet instant :  $z(t)$ , et le champ  $Z(t)$  observé sur le domaine géographique. Appelons  $m$  cette fonction de mesure. Non négative, elle est nulle si et seulement si les champs prévu et observé coïncident à l'instant  $t$ .

Les méthodes classiques d'analyse météorologique ne font usage, pour construire la condition initiale  $z_0$ , que des observations effectuées à l'instant  $t_0$ . La méthode adjointe prend en compte

l'évolution dans le temps du champ observé. Le domaine temporel durant lequel cette évaluation est réalisée doit être spécifié. Appelons le  $T = [t_0, t_1]$ . La fonction de mesure  $m$  peut alors être explicitée :

$$\begin{aligned} m : T \times H(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (t, z(t)) &\longrightarrow m(z(t), t) \end{aligned} \quad (2)$$

Ainsi définie,  $m$  est une fonction composée incluant l'observation à l'instant  $t$  du champ  $Z$  et sa comparaison avec le champ  $z(t)$  intégré par (1).

Introduisons finalement une fonction optimale caractérisant l'écart ( spatio - temporel ) entre le champ observé, tel qu'il évolue sur le domaine  $O$ , et le champ calculé par le modèle numérique. Appelons  $J$  cette fonction :

$$\begin{aligned} J : H(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ z_0 &\longrightarrow J(z_0) = \int_T m(z(t), t) dt \end{aligned} \quad (3)$$

Le problème de l'analyse météorologique s'exprime alors comme suit :

Déterminer la condition initiale  $z_0$  telle que  
la solution correspondante livrée par le modèle  
numérique (1) minimise  $J$ .

Ce problème entre dans le cadre de la théorie du contrôle optimal :

- .  $J$  est la fonction optimale.
- .  $z_0$  est la variable de contrôle.
- .  $\frac{Jz}{Jt} = f(z)$  est le système dynamique dont le fonctionnement doit être optimisé.

L'idée de la méthode consiste à calculer le gradient de  $J$  par rapport à  $z_0$  :  $\nabla_{z_0} J(z_0)$ , et à engager un processus d'optimisation sans contraintes<sup>0</sup> minimisant la valeur de  $J$  dans la direction définie par le gradient.

La valeur de  $z_0$  pour laquelle  $J$  est minimum dans la direction du gradient est choisie comme nouvelle condition initiale. Un nouveau gradient ( une nouvelle direction ) est alors calculée et tout le processus est répété jusqu'à ce que la norme du gradient tombe au dessous d'un seuil fixé.

Le calcul s'arrête alors et l'on a déterminé  $\hat{z}_0$  satisfaisant :

$$\min_{z_0 \in H(\Omega)} \int_T m(z(t), t) dt.$$

$\hat{z}_0$  est la condition initiale pour laquelle l'écart entre le champ observé  $Z$  et le champ  $z$  intégré par le modèle numérique est minimum :

- . sur le domaine d'intégration  $\Omega$  choisi.
- . dans l'intervalle  $T$  imparti à l'analyse.
- . pour la fonction d'observation et de comparaison  $m$  choisie.

La figure 1 ci-dessous illustre le processus :

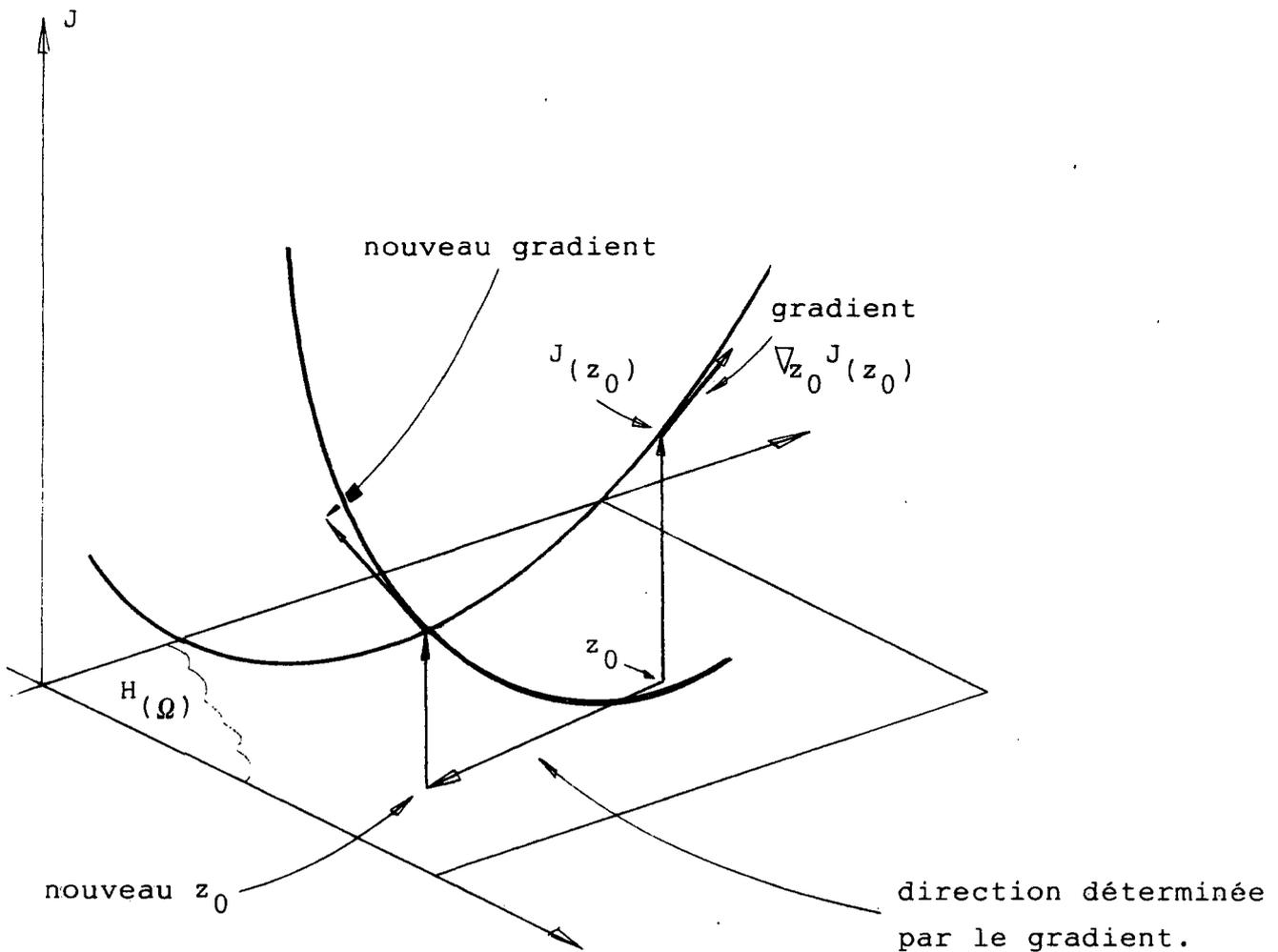


figure 1.

## II. Espace de Hilbert. Gradient. Opérateur Adjoint.

$H(\Omega)$  est un ensemble de fonctions définies sur  $\Omega$ , à valeur dans  $\mathbb{C}$ , et doté d'une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ .

$H(\Omega)$  est doté d'un produit scalaire :

$$(u, v) = \int_{\Omega} u_{(x)} \bar{v}_{(x)} dx \quad \forall u, v \in H(\Omega).$$

$H(\Omega)$  est complet ( toute suite de Cauchy converge ) pour la norme  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ .

$H(\Omega)$  est séparable ( il contient un sous ensemble dénombrable partout dense ). On peut alors construire une base hilbertienne dénombrable  $(e_n)$  telle que,  $\forall u \in H(\Omega)$  on ait :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(u, e_n). \quad (4)$$

Trois propriétés des espaces de Hilbert seront utilisées par la suite.  $H$  et  $G$  désignent deux espaces de Hilbert :

1. Soient :  $H$  muni du produit scalaire  $( \ , \ )$ ,

$J : H \longrightarrow \mathbb{C}$  une application scalaire différentiable,  
 $v \in H$ ,  $\delta v$  une variation de  $v$ .

Appelons  $\delta J$  le premier ordre de la variation sur  $J$  induite par  $\delta v$ . Il existe un unique vecteur noté  $\nabla_v J \in H$ , appelé gradient de  $J$  en  $v$ , tel que :

$$\delta J = ( \nabla_v J, \delta v ). \quad (5)$$

2. Soient :  $G$  muni du produit scalaire  $\langle \ , \ \rangle$ ,

$L : G \longrightarrow H$  un opérateur linéaire continu,  
 $G^*$  et  $H^*$  les espaces duals de  $G$  et  $H$  ( espaces des formes linéaires de  $G$ , respectivement  $H$ , sur  $\mathbb{C}$  ).

Il existe un unique opérateur  $L^* : H^* \longrightarrow G^*$ , noté opérateur adjoint de  $L$ , tel que  $\forall u \in G, v \in H$ , on ait :

$$(Lu, v) = \langle u, L^* v \rangle. \quad (6)$$

3. L'espace de Hilbert est isomorphe à son dual. Dans la suite, sauf mention particulière, on ne distinguera pas l'espace et son dual.

Remarque :

Lorsque les espaces sont de dimension finie, les opérateurs sont des matrices. L'adjointe d'une matrice est sa transconjugée si le corps est  $\mathbb{C}$ , sa transposée si le corps est  $\mathbb{R}$ .

Supposons l'opérateur  $L$  introduit en 2 différentiable et déterminons le gradient de  $J$  par rapport à  $u \in G$ .

Évaluons pour cela le premier ordre de la perturbation  $\delta J$  induite sur  $J$  par la perturbation  $\delta u$  de  $u$  :

$$\delta J = (\nabla_v J, \delta v)$$

or  $v = L(u)$  et  $L$  est différentiable donc :  $\delta v = L' \delta u$ .

$$\begin{aligned} \delta J &= (\nabla_{L(u)} J, L' \delta u) \\ &= \langle L'^* \nabla_{L(u)} J, \delta u \rangle \\ &= \langle \nabla_u J, \delta u \rangle \end{aligned}$$

soit :  $\nabla_u J = L'^* \nabla_{L(u)} J.$  (7)

Cette construction sera développée dans la suite de ce travail.

- .  $L$  y jouera le rôle d'un modèle de prévision numérique,
- .  $u$  celui de la condition initiale ( variable de contrôle ),
- .  $J$  sera la fonction optimale.

### III. Le modèle discrétisé.

Le modèle de prévision météorologique, représenté par l'équation aux dérivées partielles (1), est rappelé ici :

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= f(z) & z(t_0) &= z_0 & H(\Omega) \\ z &\in C^1([t_0, \infty), H(\Omega)). \end{aligned} \quad (1)$$

Le champ prévu en tout instant  $t$ , solution de (1), est un élément  $z$  appartenant à l'espace  $H(\Omega)$  qui est de dimension infinie.

Numériquement, le champ prévu  $z$  est approché par un champ  $\tilde{z}$ , élément d'un sous espace de dimension finie  $N$  de  $H(\Omega)$  :

$$\forall t \in [t_0, \infty) : \tilde{z}(t) \in H'(\Omega) \subset H(\Omega).$$

$H'(\Omega)$  est engendré par une base hilbertienne de dimension finie

$$e_1(x,y), \dots, e_i(x,y), \dots, e_N(x,y)$$

où  $(x,y)$  sont les coordonnées d'un point de  $\Omega$ .

Le choix de la base hilbertienne dépend de la géométrie du domaine  $\Omega$  et de la nature des opérateurs différentiels intervenant dans  $f$  (équation 1).

On construit alors le modèle discrétisé associé au modèle de prévision (1). Il est formé d'un ensemble fini de  $N$  équations différentielles ordinaires, non linéaires en météorologie :

$$\frac{dc}{dt} = F(c) \quad c(t_0) = c_0 \quad (8)$$

$$c = (c_1 \dots c_N) \in C^1([t_0, \infty), \mathbb{C}^N)$$

$$c_0 \in \mathbb{C}^N$$

$$F : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N \text{ est continûment différentiable.}$$

Ce système d'équations différentielles est établi en satisfaisant un principe variationnel garantissant l'optimalité de l'approximation  $\tilde{z}$  de  $z$ .

Les fonctions  $c_1 \dots c_N$  sont les composantes spectrales du modèle numérique (8). Leur évolution dans le temps, donnée par l'intégration de (8), permet de reconstruire, à l'aide de la base hilbertienne, l'évolution du champ prévu  $\tilde{z}$  sur le domaine  $\Omega$  :

$$\tilde{z}(x,y,t) = \sum_{i=1}^N c_i(t) e_i(x,y) \quad (9)$$

Une nouvelle fonction de mesure opérant à partir des composantes spectrales de (8) est introduite :

$$M(c(t), t) = m\left(\sum_{i=1}^N c_i(t) e_{i(x,y)}, t\right). \quad (10)$$

Appliqué au modèle discrétisé, le problème optimal formulé à la page 3 devient alors :

Déterminer une condition initiale  $c_0 \in C^N$  telle que la solution correspondante de  $\frac{dc}{dt} = F(c)$  minimise :

$$J(c_0) = \int_T M(c(t), t) dt.$$

La résolution de ce problème requiert le calcul du gradient de  $J$  par rapport à  $c_0$ . La méthode suggérée à la fin du paragraphe II, expression (7), va être utilisée à cet effet.

#### IV. Le modèle adjoint.

Le modèle adjoint est dérivé du modèle discrétisé (8) en faisant appel aux propriétés des opérateurs adjoints. Il permet le calcul du gradient  $\nabla_{c_0} J(c_0)$ .

Considérons une perturbation  $\delta c_0$  de la condition initiale  $c_0$  du modèle discrétisé (8). Soit  $\delta c(t)$  la perturbation induite par  $\delta c_0$  et propagée par (8). Au premier ordre, elle est donnée par :

$$\frac{d\delta c}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta c_1 \\ \vdots \\ \delta c_N \end{bmatrix} = F'_c(t) \begin{bmatrix} \delta c_1 \\ \vdots \\ \delta c_N \end{bmatrix} \quad \text{où}$$

$$F'_c(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial c_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial c_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial c_1} & & \frac{\partial F_N}{\partial c_N} \end{bmatrix} (t) \quad (11)$$

est la matrice jacobienne associée à  $F$  et évaluée en  $c(t)$ ,  $t \in [t_0, \infty)$ .

Ce système d'équations différentielles, linéaire, s'écrit :

$$\frac{d\delta c}{dt} = F'_c(t) \delta c(t) \quad (12)$$

On le nomme système linéaire tangent associé à (8). Sauf cas particuliers, il n'est pas intégrable analytiquement. On peut cependant toujours construire, par intégration numérique, un opérateur linéaire  $R$ , appelé résolvant, formellement défini par :

$$R : [t', \infty) \longrightarrow M_N(C)$$

$$t \longrightarrow R(t, t') = e^{\int_{t'}^t F'_c(\tau) d\tau} \quad (13)$$

$$t' \in T = [t_0, t_1].$$

$e$  est l'exponentielle étendue aux matrices :  $L \in M_N(C)$ ,

$$e^L = \mathbb{1} + L + \frac{L \cdot L}{2} + \dots + \frac{L^n}{n!} + \dots$$

Le résolvant donne les solutions de (12) : On a, à l'instant  $t \geq t_0$  :

$$\delta c(t) = R(t, t_0) \delta c_0 \quad (14)$$

Le résolvant satisfait les deux propriétés suivantes :

$$i. \quad R(t, t) = \mathbb{1}. \quad ii. \quad \frac{\partial}{\partial t} R(t, t') = F'_{c(t)} R(t, t').$$

preuve : i : immédiate. ii :

$$t^R(t, t') = \frac{\partial}{\partial t} e^{\int_{t'}^t F'_{c(\tau)} d\tau} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{t'}^t F'_{c(\tau)} d\tau e^{\int_{t'}^t F'_{c(\tau)} d\tau} = F'_{c(t)} R(t, t').$$

Disposant de (14), évaluons la perturbation induite à l'instant  $t \in T$  sur la fonction de mesure  $M$  (10) par la perturbation initiale  $\delta c_0$ . Utilisant (5), on a :

$$\begin{aligned} \delta M &= ( \nabla_{c(t)} M(c(t), t), \delta c(t) ) = \\ &= ( \nabla_{c(t)} M(c(t), t), R(t, t_0) \delta c_0 ) = \\ &= ( R^*(t, t_0) \nabla_{c(t)} M(c(t), t), \delta c_0 ) \end{aligned}$$

en utilisant (14) et (6). Le produit scalaire ne change pas car l'espace ne change pas. Pour tout l'intervalle  $T$ , la perturbation induite sur la fonction optimale  $J$  est :

$$\begin{aligned} \delta J_{(c_0)} &= \int_T ( R^*(t, t_0) \nabla_{c(t)} M(c(t), t), \delta c_0 ) dt = \\ &= ( \int_T R^*(t, t_0) \nabla_{c(t)} M(c(t), t) dt, \delta c_0 ) \end{aligned}$$

soit, en utilisant à nouveau (5) :

$$\nabla_{c_0} J_{(c_0)} = \int_T R^*(t, t_0) \nabla_{c(t)} M(c(t), t) dt. \quad (15)$$

Il se pose naturellement la question de déterminer l'adjoint d'un résolvant que l'on ne sait pas intégrer analytiquement. Introduisons le système linéaire tangent adjoint :

$$\frac{d \delta c^*}{dt} = - F'_{c(t)}{}^* \delta c^* \quad (16)$$

$F'_{c(t)}{}^*$  est la transconjuguée de la jacobienne  $F'_{c(t)}$  évaluée en  $c(t)$ .

Remarquons que  $\delta c^*$  appartient au dual de l'espace de Hilbert,

ce qui, étant donné la remarque 3 page 5, ne nous importe pas. Un résolvant noté  $S$  est associé à (16). Il satisfait les mêmes propriétés que  $R$  :

$$\cdot S_{(t,t')} \in M_N(\mathbb{C})$$

$$\cdot \delta c_0^* = S_{(t_0,t)} \delta c_{(t)}^* \quad (17)$$

$$\cdot S_{(t,t)} = 1 \quad \cdot \frac{\partial}{\partial t} S_{(t,t')} = -F'_{c(t)}^* S_{(t,t')} \quad (18)$$

On suspecte que  $S$  soit l'adjoint de  $R$ . Prouvons-le. Soit  $c(t)$  livré par l'intégration de (8). Plaçons-nous à un instant  $t \in T$  et évaluons :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} ( \delta c_{(t)}, \delta c_{(t)}^* ) = \\ & = ( \frac{d}{dt} \delta c_{(t)}, \delta c_{(t)}^* ) + ( \delta c_{(t)}, \frac{d}{dt} \delta c_{(t)}^* ) \\ & = ( F'_{c(t)} \delta c_{(t)}, \delta c_{(t)}^* ) + ( \delta c_{(t)}, -F'_{c(t)}^* \delta c_{(t)}^* ) \\ & = ( \delta c_{(t)}, F'_{c(t)}^* \delta c_{(t)}^* ) - ( \delta c_{(t)}, F'_{c(t)} \delta c_{(t)}^* ) = 0. \end{aligned}$$

On a donc :  $( \delta c_{(t)}, \delta c_{(t)}^* ) = \text{cste}$  et par conséquent, aux deux instants  $t_0$  et  $t$  :

$$t_0 : \text{cste} = ( \delta c_0, \delta c_0^* ) = ( \delta c_0, S_{(t_0,t)} \delta c_{(t)}^* )$$

$$\begin{aligned} t : \text{cste} &= ( \delta c_{(t)}, \delta c_{(t)}^* ) = ( R_{(t,t_0)} \delta c_0, \delta c_{(t)}^* ) \\ &= ( \delta c_0, R_{(t,t_0)}^* \delta c_{(t)}^* ). \end{aligned}$$

Ainsi,  $R_{(t,t_0)}^* = S_{(t_0,t)}$ . L'expression (15) prend un sens, en remplaçant  $R^*$  par  $S$  :

$$\nabla_{c_0} J(c_0) = \int_T S_{(t_0,t)} \nabla_{c(t)} M(c(t), t) dt. \quad (19)$$

Transformons le système linéaire adjoint (16) en sorte que (19) en soit une solution, pour une condition initiale  $\delta c_{(t_1)}^*$  bien choisie. Ajoutons à cette fin à (16) un terme inhomogène formé du gradient de la fonction de mesure par rapport aux composantes spectrales du modèle discrétisé (8), on forme de la sorte le

système linéaire tangent adjoint inhomogène :

$$\frac{d}{dt} \delta c^* = -F'_{c(t)}^* \delta c^*(t) - \nabla_{c(t)} M(c(t), t). \quad (20)$$

Vérifions que (19) est solution du système inhomogène (20) pour une condition initiale  $\delta c^*(t_1)$  à déterminer. Prouvons tout d'abord que :

$$\delta c^*(t) = \int_{t_1}^t S(t, \tau) \nabla_{c(\tau)} M(c(\tau), \tau) d\tau \quad (21)$$

est solution de (20) en utilisant le lemme suivant, donné sans preuve :

Soit  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^N$  différentiable. On a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{t_1}^t f(t, \tau) d\tau = f(t, t) + \int_{t_1}^t \frac{\partial}{\partial t} f(t, \tau) d\tau.$$

Evaluons  $\frac{d}{dt} \delta c^*(t) =$

$$\begin{aligned} &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_1}^t S(t, \tau) \nabla_{c(\tau)} M(c(\tau), \tau) d\tau \\ &= - \left[ S(t, t) \nabla_{c(t)} M(c(t), t) + \int_{t_1}^t \frac{\partial}{\partial t} [S(t, \tau) \nabla_{c(\tau)} M(c(\tau), \tau)] d\tau \right] \end{aligned}$$

en appliquant le lemme,

$$= - \left[ \mathbb{I} \nabla_{c(t)} M(c(t), t) + \int_t^{t_1} F'_{c(t)}^* S(t, \tau) \nabla_{c(\tau)} M(c(\tau), \tau) d\tau \right]$$

en utilisant (18)

$$= - \nabla_{c(t)} M(c(t), t) - F'_{c(t)}^* \int_t^{t_1} S(t, \tau) \nabla_{c(\tau)} M(c(\tau), \tau) d\tau$$

$$= - F'_{c(t)}^* \delta c^*(t) - \nabla_{c(t)} M(c(t), t).$$

On obtient la condition initiale  $\delta c^*(t_1) = 0$  en posant  $t = t_1$  dans (21). De plus, en posant  $t = t_0$  dans la même équation et en se référant à (19), on a démontré le théorème suivant :

$$\nabla_{c_0} J(c_0) = \delta c_0^* \quad \text{où}$$

$$\delta c_0^* = \int_T S(t_0, \tau) \nabla_{c(\tau)} M(c(\tau), \tau) d\tau \quad (19)$$

est solution en  $t_0$  de

$$\frac{d\delta c^*}{dt} = - F'_{c(t)} \delta c^* - \nabla_{c(t)} M(c(t), t) \quad (20)$$

muni de la condition initiale :

$$\delta c^*(t_1) = 0.$$

Dans le langage courant, (8), le modèle discrétisé, est le modèle direct, (20) le modèle adjoint. Remarquons que le modèle adjoint est l'adjoint du modèle linéaire tangent associé au modèle direct et qu'il n'est pas l'adjoint du modèle direct lui-même.

Le calcul du gradient  $\nabla_{c_0} J(c_0)$ , réalisé en deux étapes, est illustré à la figure 2 :

1. Le modèle direct est intégré de  $t_0$  à  $t_1$  à partir de la condition initiale  $c_0$  :
  - . les composantes spectrales sont mémorisées en chaque pas temporel de l'intégration.
  - . on profite de l'intégration pour évaluer la fonction optimale  $J(c_0)$ , utilisée plus tard dans le processus d'optimisation.
2. Le modèle adjoint est intégré dans le sens rétrograde, de  $t_1$  à  $t_0$ , à partir de la condition initiale  $\delta c^*(t_1) = 0$  :
  - . les valeurs des composantes spectrales mémorisées lors du calcul direct sont utilisées pour déterminer le terme inhomogène et les éléments de la matrice transconjuguée du modèle adjoint.
  - . les observations effectuées tout au long de l'intervalle T sont prises en compte en chaque instant par la fonction de mesure M intervenant dans le terme inhomogène de (20).

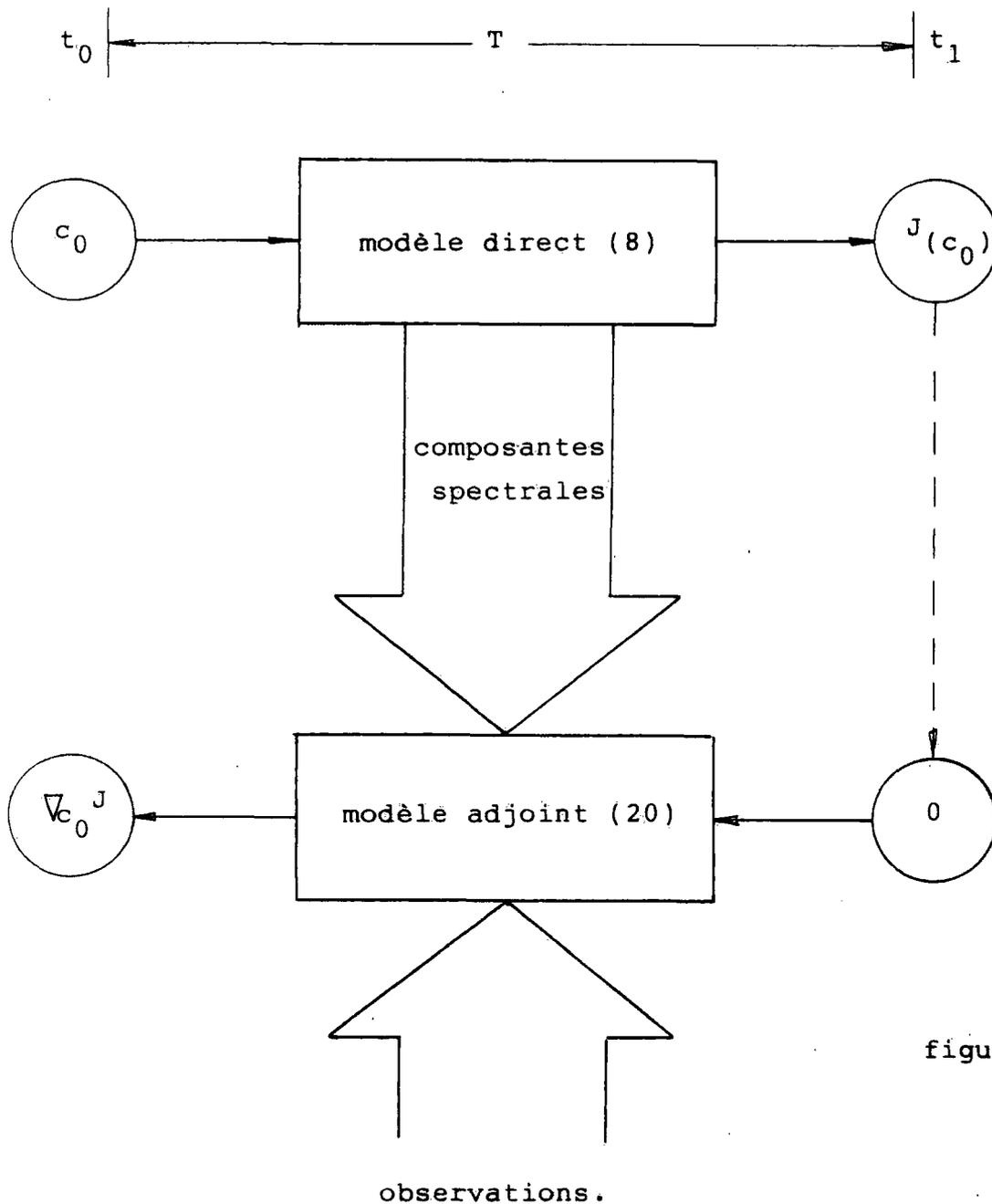


figure 2.

Le modèle direct de prévision ne subit aucun forçage vers les observations. Il est intégré librement sur l'intervalle imparti à l'analyse. Les observations météorologiques sont exclusivement prises en compte par le modèle adjoint à travers le terme inhomogène. Cette qualité fondamentale donne sa puissance et son élégance à la méthode du modèle adjoint. Elle nous permettra d'utiliser des méthodes d'optimisation **sans contraintes** lorsqu'il s'agira de choisir une condition initiale ( variable de contrôle ) minimisant la fonction optimale.

### V. Application : l'équation de vorticité barotrope.

Cette équation, dérivée de l'équation d'Euler, décrit le transport par le fluide atmosphérique de sa propre vorticité à la surface de la planète en rotation. Elle s'écrit :

$$\frac{\partial \nabla^2 \varphi}{\partial t} = J(\nabla^2 \varphi + f, \varphi) \quad \text{où :}$$

$J$  est l'opérateur jacobien

$\varphi$  est la fonction de courant du fluide

$f = 2 \Omega_t \sin(\lambda)$  est le paramètre de Coriolis,  $\Omega_t$  la vitesse angulaire de la terre,  $\lambda$  la latitude.

$\nabla^2 \varphi$  est la vorticité absolue du fluide,  $f$  représente la vorticité induite par la rotation de la terre et  $\nabla^2 \varphi + f$  est la vorticité totale du fluide.

Rapportée au " plan  $\beta$  " tangent à la sphère en un point situé à la latitude  $\lambda$ , l'équation de vorticité s'écrit, dans le système local de coordonnées  $(x, y)$ , et en tenant compte des constantes physiques :

$$\frac{\partial \nabla^2 \varphi}{\partial t} + \frac{g}{f} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \varphi}{\partial x} \right] + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (22)$$

$g$  est l'accélération de la pesanteur.

$\beta = \frac{\partial f}{\partial y} = R^{-1} 2 \Omega_t \cos(\lambda)$ ,  $R$  est le rayon terrestre.

La figure 3 exhibe cette construction. L'équation (22), aux dérivées partielles et non linéaire, correspond à l'équation (1) des pages 2 et 7. Le domaine  $\Omega$  d'intégration est simplement le rectangle de coordonnées  $[0..L_x, 0..L_y]$  hachuré sur la figure 3.

La suite du présent paragraphe est consacrée à la construction successive, à partir de (22), des trois systèmes d'équations différentielles suivants :

1. le modèle discrétisé, correspondant à l'équation (8).
2. le modèle linéaire tangent, correspondant à l'équation (12).
3. le modèle linéaire tangent adjoint, correspondant à l'équation (16).

1. La discrétisation passe par le choix d'une base hilbertienne dépendant des opérateurs différentiels figurant dans (22) et de la géométrie de  $\Omega$ . Dans notre cas, les éléments de cette base

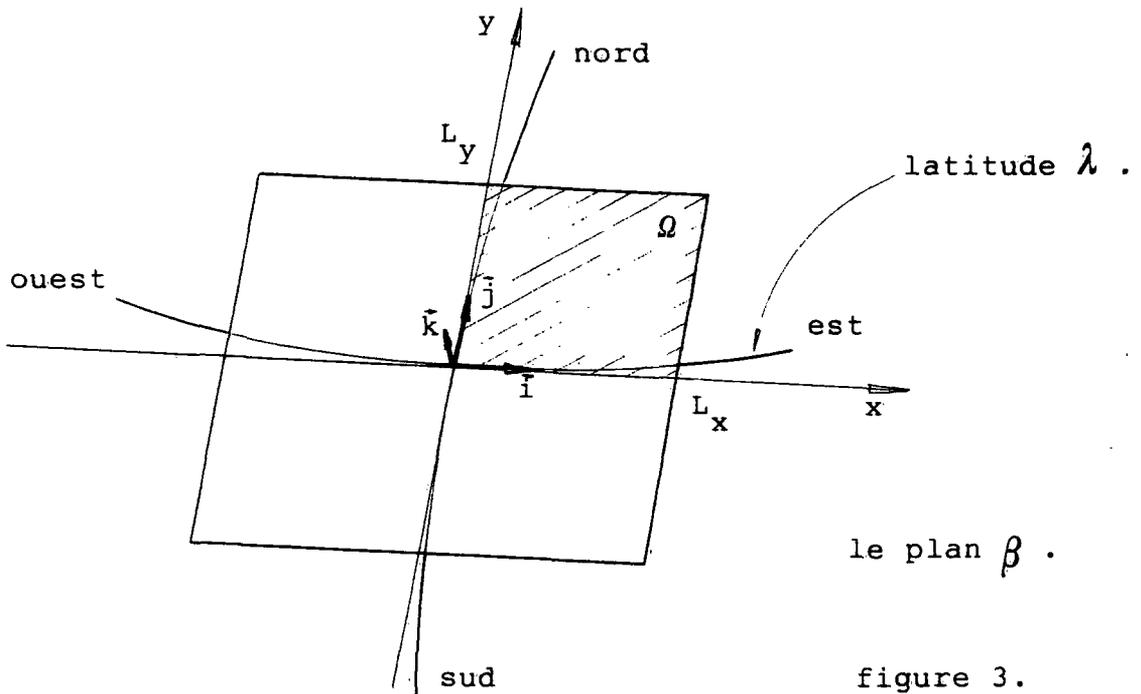


figure 3.

sont les fonctions propres du laplacien  $\nabla^2$  calculé sur le rectangle hachuré, soit des fonctions de la forme :

$$e^{i(mkx+nly)} \quad \text{où : } k = \frac{2\pi}{L_x}, \quad l = \frac{2\pi}{L_y}, \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

$$x \in [0, L_x], \quad y \in [0, L_y] \quad i = \sqrt{-1}$$

Utilisant le repère naturel tangent  $[\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}]$  ( figure 3 ), formons les schémas d'indices et de coordonnées :

$$\begin{aligned} I &= m\bar{k}\bar{i} + n\bar{l}\bar{j} + 0\bar{k} \\ R &= x\bar{i} + y\bar{j} + 0\bar{k} \end{aligned} \quad (24)$$

Exprimée dans la base (23) à l'aide des schémas (24), la fonction de courant s'écrit :

$$\Psi(x, y, t) = \sum_I c_I(t) e^{iI \cdot R} \quad (25)$$

L'équation barotrope devient, en appliquant les conventions usuelles du calcul vectoriel :

$$\sum_I (I.I) \frac{dc_I}{dt} e^{iI.R} + i\beta \sum_I c_I \Pi_x e^{iI.R} + \frac{g}{f} \sum_I \sum_H (\bar{k}.H\Lambda I)(I.I) c_I c_H e^{i(I+H).R} = 0 \quad (26)$$

H est un schéma d'indices du même type que I et  $\Pi_x = mk$ .

Une base hilbertienne de dimension finie est obtenue en tronquant les schémas d'indices :  $m, n \in \mathcal{M}^2 = [-M \dots +M]$  pour  $M \in \mathbb{N}$  fixé. La fonction de courant engendrée par la base finie n'est pas égale à la fonction de courant donnée par (25). Elles diffèrent d'une quantité  $\varepsilon_{\mathcal{M}}$  donnée par la version tronquée de l'équation (26) :

$$\sum_{I \in \mathcal{M}^2} (I:I) \frac{dc_I}{dt} e^{iI.R} + i\beta \sum_{I \in \mathcal{M}^2} c_I \Pi_x e^{iI.R} + \frac{g}{f} \sum_{I \in \mathcal{M}^2} \sum_{H \in \mathcal{M}^2} (\bar{k}.H\Lambda I)(I.I) c_I c_H e^{i(I+H).R} = \varepsilon_{\mathcal{M}} \quad (27)$$

La discrétisation est optimale lorsque la différence  $\varepsilon_{\mathcal{M}}$  est orthogonale au sous-espace engendré par la base finie, soit, lorsque pour tout élément  $e^{iP.R}$  de cette base, on satisfait :

$$(\varepsilon_{\mathcal{M}}, e^{iP.R}) = \int_{\Omega} e^{-iP.R} \varepsilon_{\mathcal{M}} dx dy = 0. \quad (28)$$

L'expression de cette condition conduit à l'équation barotrope discrétisée donnée par un système autonome d'équations différentielles ordinaires non linéaires :

$$\frac{dc_I}{dt} + \frac{i\beta \Pi_x}{(I.I)} c_I + \frac{g}{f} \sum_{H \in \mathcal{M}^2} \bar{k}_2 (H\Lambda I) \frac{(I-H).(I-H)}{I.I} c_H c_{I-H} = 0 \quad (29)$$

$I \in \mathcal{M}^2$

Ce système est l'exact correspondant de l'équation (8) introduite au paragraphe III.

Les coefficients spectraux  $c_I$  sont complexes conjugués :  $c_I = \bar{c}_{-I}$ . Grâce à cette propriété, la fonction de courant  $\psi$ , reconstruite sur la base hilbertienne finie, est réelle.

2. Abordons le calcul du modèle tangent. Introduisons les termes

$$A_I = -\frac{i\beta I_x}{I.I} \quad \text{et} \quad B_{IH} = -\frac{g}{f} \bar{k} \cdot (H \wedge I) \frac{(I-H) \cdot (I-H)}{I.I}. \quad \text{Le modèle tangent}$$

est défini par :

$$\frac{d \delta c_I}{dt} = \sum_K \frac{\partial}{\partial c_K} ( A_I c_I + \sum_H B_{IH} c_H c_{I-H} ) \delta c_K. \quad (30)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d \delta c_I}{dt} = & -\frac{i\beta I_x}{I.I} \delta c_I + \\ & + \frac{g}{f} \sum_H \bar{k} \cdot (H \wedge I) \frac{2I.H - I.I}{I.I} c_{I-H} \delta c_H \end{aligned} \quad (31)$$

C'est l'équation linéaire tangente (12) annoncée à la page 9 .

3. L'équation linéaire tangente adjointe, obtenue à partir de (31) en calculant la transconjuguée de la matrice jacobienne définie par le second membre de (31), est :

$$\begin{aligned} \frac{d \delta c_I^*}{dt} = & -i\beta \frac{I_x}{I.I} \delta c_I^* - \\ & - \frac{g}{f} \sum_H \bar{k} \cdot (I \wedge H) \frac{2H.I - H.H}{H.H} c_{I-H} \delta c_H^* \end{aligned} \quad (32)$$

Ce système, correspondant à l'équation (16) de la page 10 , est le **modèle adjoint**.

Choisissons le nombre de composantes spectrales introduites dans les systèmes direct (29) et adjoint (32) en fixant le nombre  $M$  défini à la page 17 . Le but du présent travail étant simplement d'acquiescer une certaine familiarité avec l'objet de l'étude, posons  $M = 1$ . Le modèle barotrope spectral de bas ordre ainsi formé est le plus simple qui puisse être écrit sans être trivial.

Les composantes spectrales peuvent être énumérées en fonction des indices  $m$  et  $n$  :

m	n	composante spectrale	nouvelle notation
-1	-1	$c_{-1-1}$	$c_1$
-1	0	$c_{-1 0}$	$c_2$
-1	+1	$c_{-1+1}$	$c_3$
0	-1	$c_{0-1}$	$c_4$
0	+1	$c_{0+1}$	$c_5$
+1	-1	$c_{+1-1}$	$c_6$
+1	0	$c_{+1 0}$	$c_7$
+1	+1	$c_{+1+1}$	$c_8$

Ainsi qu'annoncé à la page 17 , les composantes spectrales sont complexes conjuguées :  $c_1 = \bar{c}_8$ ,  $c_2 = \bar{c}_7$ ,  $c_3 = \bar{c}_6$ ,  $c_4 = \bar{c}_5$ .

Il est possible dans ces conditions d'écrire explicitement les modèles direct et adjoint. Seuls le domaine  $\Omega$  d'intégration et quelques constantes physiques doivent être fixés : Choisissons  $L_x = 5000$  km,  $L_y = 2500$  km. Introduisons une constante  $L = 2\pi / L_x$ , les nombres d'onde  $k$  et  $l$  sont normalisés à  $k = 1$  et  $l = 2$ . Le modèle direct, équation (29) devient :

$$\begin{aligned}
 \frac{dc_1}{dt} &= + i \frac{\beta}{5} L^{-1} c_1 - 1,2 \frac{g}{f} L^2 c_2 c_4 \\
 \frac{dc_2}{dt} &= + i \beta L^{-1} c_2 - 2,0 \frac{g}{f} L^2 (c_1 c_5 - c_3 c_4) \\
 \frac{dc_3}{dt} &= + i \frac{\beta}{5} L^{-1} c_3 + 1,2 \frac{g}{f} L^2 c_2 c_5 \\
 \frac{dc_4}{dt} &= - 2,0 \frac{g}{f} L^2 (c_2 c_6 - c_1 c_7) \\
 \frac{dc_5}{dt} &= - 2,0 \frac{g}{f} L^2 (c_3 c_7 - c_2 c_8) \\
 \frac{dc_6}{dt} &= - i \frac{\beta}{5} L^{-1} c_6 + 1,2 \frac{g}{f} L^2 c_4 c_7 \\
 \frac{dc_7}{dt} &= - i \beta L^{-1} c_7 - 2,0 \frac{g}{f} L^2 (c_4 c_8 - c_5 c_6) \\
 \frac{dc_8}{dt} &= - i \frac{\beta}{5} L^{-1} c_8 - 1,2 \frac{g}{f} L^2 c_5 c_7
 \end{aligned} \tag{33}$$

Le système tangent adjoint homogène correspondant aux équations (16) et (32) est :

(34)

$$\frac{d\delta c_1^*}{dt} = + i \frac{\beta}{5} L^{-1} \delta c_1^* + 2,0 \frac{g}{F} L^2 (c_4 \delta c_2^* - c_2 \delta c_4^*)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta c_2^*}{dt} = & + i \beta L^{-1} \delta c_2^* + 2,0 \frac{g}{F} L^2 (c_3 \delta c_4^* - c_1 \delta c_5^*) \\ & + 1,2 \frac{g}{F} L^2 (c_5 c_1^* - c_4 c_3^*) \end{aligned}$$

$$\frac{d\delta c_3^*}{dt} = + i \frac{\beta}{5} L^{-1} \delta c_3^* + 2,0 \frac{g}{F} L^2 (c_2 \delta c_5^* - c_5 \delta c_2^*)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta c_4^*}{dt} = & 2,0 \frac{g}{F} L^2 (c_1 \delta c_7^* - c_6 \delta c_2^*) \\ & + 1,2 \frac{g}{F} L^2 (c_7 \delta c_1^* - c_2 \delta c_6^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta c_5^*}{dt} = & 2,0 \frac{g}{F} L^2 (c_8 \delta c_2^* - c_3 \delta c_7^*) \\ & + 1,2 \frac{g}{F} L^2 (c_2 \delta c_8^* - c_7 \delta c_3^*) \end{aligned}$$

$$\frac{d\delta c_6^*}{dt} = - i \frac{\beta}{5} L^{-1} \delta c_6^* + 2,0 \frac{g}{F} L^2 (c_7 \delta c_4^* - c_4 \delta c_7^*)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta c_7^*}{dt} = & - i \beta L^{-1} \delta c_7^* + 2,0 \frac{g}{F} L^2 (c_6 \delta c_5^* - c_8 \delta c_4^*) \\ & + 1,2 \frac{g}{F} L^2 (c_4 \delta c_8^* - c_5 \delta c_6^*) \end{aligned}$$

$$\frac{d\delta c_8^*}{dt} = - i \frac{\beta}{5} L^{-1} \delta c_8^* + 2,0 \frac{g}{F} L^2 (c_5 \delta c_7^* - c_7 \delta c_5^*)$$

Une bonne part du chemin conduisant à l'équation (20) du système linéaire tangent adjoint inhomogène est parcourue. Il ne reste qu'à introduire l'action des données d'observation sur le système adjoint en lui ajoutant un terme inhomogène de "forçage".

## VI. La prise en compte des observations.

Le terme inhomogène, indépendant du modèle adjoint, dépend du dispositif d'observation mis en oeuvre. Le modèle barotrope ayant pour variable un champ géopotentiel, supposons disposer d'un réseau de stations d'observation du géopotentiel formé de  $N = 100$  stations aléatoirement distribuées sur le domaine  $\Omega$  ( figure 4 ).

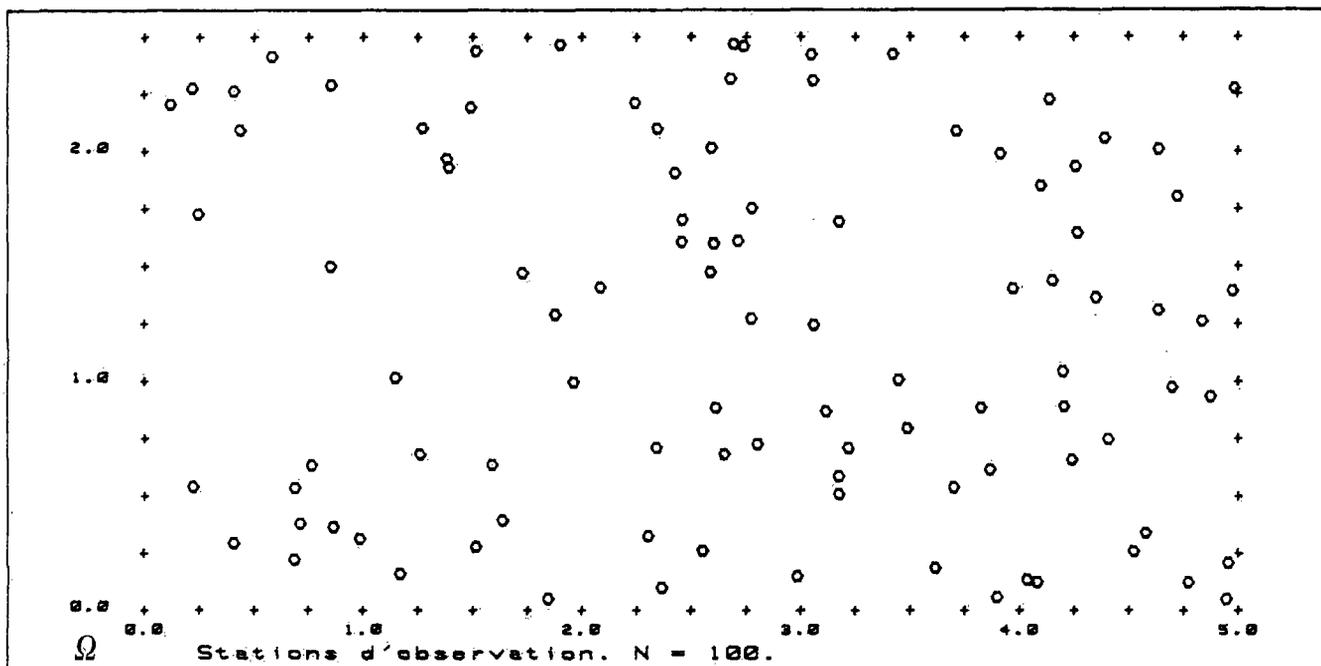


figure 4.

Soient  $(x_j, y_j)$ ,  $j = 1 \dots N$ , les coordonnées de chaque station.

Appelons :

- $O_j(t)$  le champ observé à la station numéro  $j$  à l'instant  $t$ .
- $\Psi(x_j, y_j, t)$  le champ prévu par le modèle direct à l'endroit de coordonnées  $(x_j, y_j)$  à l'instant  $t$ . On a :

$$\Psi(x_j, y_j, t) = \sum_I c_I(t) e^{iI \cdot R_j} \quad (35)$$

$$R_j = x_j \vec{i} + y_j \vec{j} + 0\vec{k} \quad j = 1 \dots N$$

Une fonction de mesure, équation (10), peut alors être introduite. La première venant à l'esprit, la plus simple, est :

$$M_{(c(t), t)} = \sum_{j=1}^N (\Psi_{(x_j, y_j, t)} - O_{j(t)})^2. \quad (36)$$

Choisie dans le cadre du présent travail, elle mesure la distance euclidienne séparant les champs observé et prévu, tels qu'ils sont perçus par le réseau d'observation.

Abordons le calcul du gradient, en évaluant tout d'abord sa K ème composante :

$$\begin{aligned} \left[ \nabla_{c(t)} M_{(c(t), t)} \right]_K &= \\ \frac{\partial}{\partial c_K} \sum_{j=1}^N \left( \sum_I c_I(t) e^{iI \cdot R_j} - O_{j(t)} \right)^2 &= \\ 2 \sum_{j=1}^N \left( \Psi_{(x_j, y_j, t)} - O_{j(t)} \right) e^{iK \cdot R_j} &. \end{aligned}$$

Le terme inhomogène de l'équation (20) s'exprime :

$$\begin{aligned} \nabla_{c(t)} M_{(c(t), t)} &= \\ 2 \sum_{j=1}^N \left\{ \left( \Psi_{(x_j, y_j, t)} - O_{j(t)} \right) \begin{bmatrix} \vdots \\ e^{iI \cdot R_j} \\ \vdots \end{bmatrix} \right\} &. \quad (37) \end{aligned}$$

Le modèle linéaire tangent adjoint inhomogène est totalement spécifié. Ecrivons-le une fois en entier :

. sous forme générale :

$$\frac{d\delta c^*}{dt} = - F'_{c(t)} \delta c^* - \nabla_{c(t)} M_{(c(t), t)} \quad (20)$$

. tel qu'il est réalisé pour l'équation barotrope (29), la fonction de mesure (36) et le réseau d'observation introduit :

( page suivante )

$$\begin{aligned}
\frac{d \delta c_I^*}{dt} &= & (38) \\
&- i \beta \frac{I_x}{I \cdot I} \delta c_I^* \\
&- \frac{g}{f} \sum_H \vec{k} \cdot (IAH) \frac{2H \cdot I - H \cdot H}{H \cdot H} c_{I-H}(t) \delta c_H^* \\
&- 2 \sum_{j=1}^N \left\{ \left( \sum_K c_K(t) e^{iK \cdot R_j} - O_j(t) \right) e^{iI \cdot R_j} \right\}.
\end{aligned}$$

Ce système d'équations différentielles inhomogènes est, rappelons-le, intégré dans le sens rétrograde, de  $t_1$  à  $t_0$ , sur l'intervalle  $[t_0, t_1]$  imparté à l'analyse. Sa solution en  $t_0$ ,  $\delta c_{(t_0)}^*$ , est égale au gradient de la fonction optimale :

$$J_{(c_{(t_0)})} = \int_{t_0}^{t_1} M_{(c_{(t)}, t)} dt \quad (39)$$

par rapport à la condition initiale  $c_{(t_0)}$  du modèle direct :

$$\delta c_{(t_0)}^* = \nabla_{c_{(t_0)}} J_{(c_{(t_0)})}. \quad (40)$$

## VII. Optimisation.

Rappelons le problème optimal formulé à la page 8 en tenant compte des éléments introduits aux paragraphes V et VI :

Déterminer la condition initiale  $c_{(t_0)} \in \mathcal{C}^{\mathcal{K}^2}$  telle que la solution correspondante de (29) minimise (39).

Il faut donc déterminer :

$$\begin{aligned} \min_{c_{(t_0)} \in \mathcal{C}^{\mathcal{K}^2}} J(c_{(t_0)}) & \quad \text{tel que} \\ J \in \mathcal{C}^1 & \quad \text{et} \\ \nabla_{c_{(t_0)}} J(c_{(t_0)}) & \quad \text{est connu.} \end{aligned}$$

Ainsi formulé, le problème est **sans contraintes**. Celles-ci sont implicitement prises en compte lors du calcul du gradient de la fonction optimale.

Diverses méthodes peuvent être envisagées. Elles sont toutes itératives et consistent à transformer le problème dans  $\mathcal{C}^{\mathcal{K}^2}$  en une suite de problèmes d'optimisation à une dimension. Citons, sans être exhaustif, les méthodes de plus grande pente, de Newton, des directions conjuguées, des gradients conjugués.

La méthode choisie dans le cadre du présent travail, la plus simple, est celle de la **plus grande pente**. Itérative, elle consiste à construire une suite de conditions initiales  $c_{(t_0)}^0 \dots c_{(t_0)}^i \dots$  minimisant la fonction optimale dans les directions définies par les gradients successifs.

Simplifions tout d'abord les notations en posant  $c_0^i = c_{(t_0)}^i$  et introduisons une constante  $\varepsilon > 0$ .

Le **pas initial** de l'optimisation revient à fixer  $c_0^0$  arbitrairement.

Le **pas d'itération numéro i** est alors le suivant :

- .  $c_0^{i-1}$  étant donnée, on calcule :
- .  $J_{(c_0^{i-1})}$  en intégrant le modèle direct,

.  $\nabla_{c_0}^{i-1} J_{(c_0^{i-1})}$  en intégrant le modèle adjoint.

. L'itération est **arrêtée** lorsque :

$$\|\nabla_{c_0}^{i-1} J_{(c_0^{i-1})}\| \leq \varepsilon .$$

La condition initiale livrée par la méthode adjointe d'analyse est alors :

$$c_{(t_0)} = c_0^{i-1} .$$

. Si  $\|\nabla_{c_0}^{i-1} J_{(c_0^{i-1})}\| > \varepsilon$ , on construit la fonction :

$$\begin{array}{l} R \longrightarrow R \\ s \longrightarrow g(s) = \frac{d}{ds} J_{(c_0^{i-1})} - s \nabla_{c_0}^{i-1} J_{(c_0^{i-1})} \end{array} \quad (41)$$

et l'on détermine  $s^i$  tel que  $g_{(s^i)} = 0$ . On pose alors :

$$c_0^i = c_0^{i-1} - s^i \nabla_{c_0}^{i-1} J_{(c_0^{i-1})} \quad (42)$$

**Fin de l'itération.**

**Fin de l'algorithme.**

- . On a simplement choisi  $c_0^0 = 0$  dans le présent travail. Dans un cadre opérationnel,  $c_0^0$  devrait être le "first guess" livré par une exécution antérieure du modèle de prévision.
- . Le calcul du zéro de  $g$  est laborieux. Effectué ici à l'aide d'un algorithme de Newton, il requiert que la dérivée seconde de  $J$  par rapport à  $s$  ne soit pas nulle. Cette propriété, satisfaite pour un modèle barotrope lorsque la fonction de mesure (36) est convexe, garantit l'unicité du minimum de la fonction optimale (39). Elle garantit donc également l'unicité de la condition initiale satisfaisant le problème optimal.

## VIII. Simulation.

L'ensemble du dispositif présenté aux paragraphes V, VI et VII a été programmé sur un ordinateur HP-9816 à fin d'expérimentation. Le modèle barotrope utilisé est représenté par le système d'équations différentielles (33) intégré sur le domaine  $\Omega$  du plan  $\beta$  exhibé à la figure 3. La latitude est de  $45^\circ$  N, les dimensions  $L_x = 5000$  km. et  $L_y = 2500$  km. Le modèle adjoint est le système (34) augmenté du terme inhomogène (37). Il opère à partir du réseau d'observation présenté à la figure 4. L'optimisation est réalisée par la méthode de la plus grande pente, équations (41) et (42).

Les "observations", élaborées en faisant tourner de manière indépendante le modèle direct de zéro à +20 h. à partir d'une condition initiale arbitraire, sont les valeurs du géopotential ainsi calculées en chaque station, à raison d'une valeur par heure de +12 h. à +20 h.

Le diagramme de la figure 5 illustre la décroissance de la fonction optimale (39) obtenue en effectuant une analyse adjointe durant l'intervalle +12 h. +20 h. à partir des "observations" créées au cours de la simulation ci-dessus.

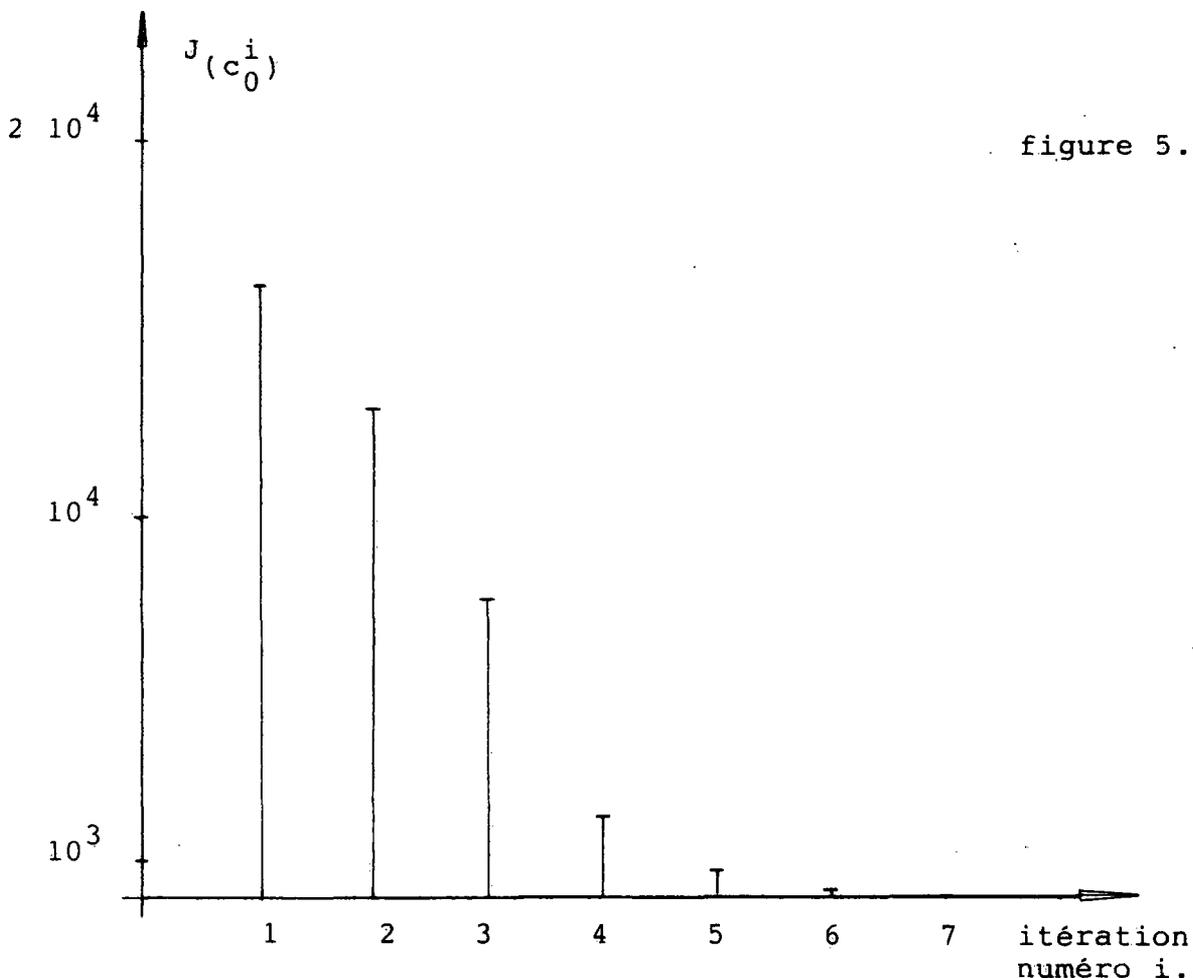


figure 5.

La figure 6 exhibe le champ élaboré à +12 h. par la simulation, exprimé en mètres géopotentiels relatifs à l'altitude moyenne 5500 m. Ce champ est la condition initiale vers laquelle doit tendre le processus d'analyse adjointe. Les quatre cartes de la figure 7 sont les conditions initiales successivement élaborées aux pas d'itération 1, 3, 5 et 7. Les valeurs de la fonction optimale, notées dans chaque cartouche, correspondent aux barres verticales de la figure 5. La convergence vers la figure 6 est évidente.

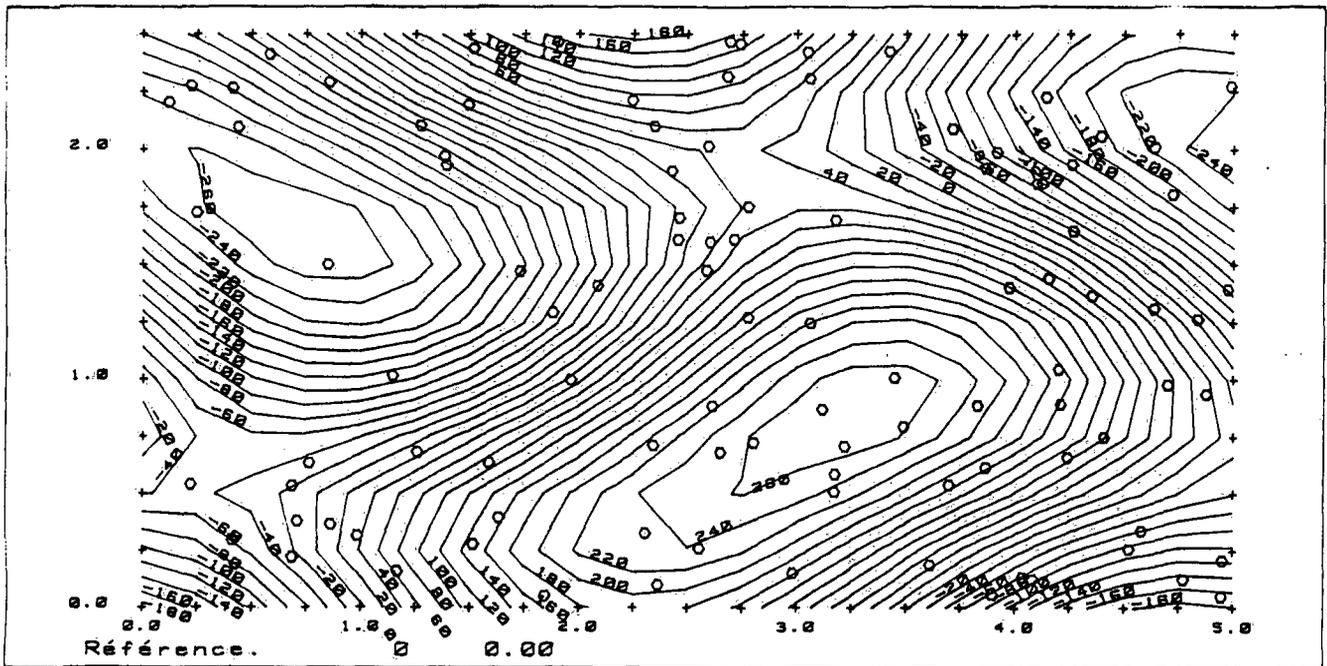


figure 6.

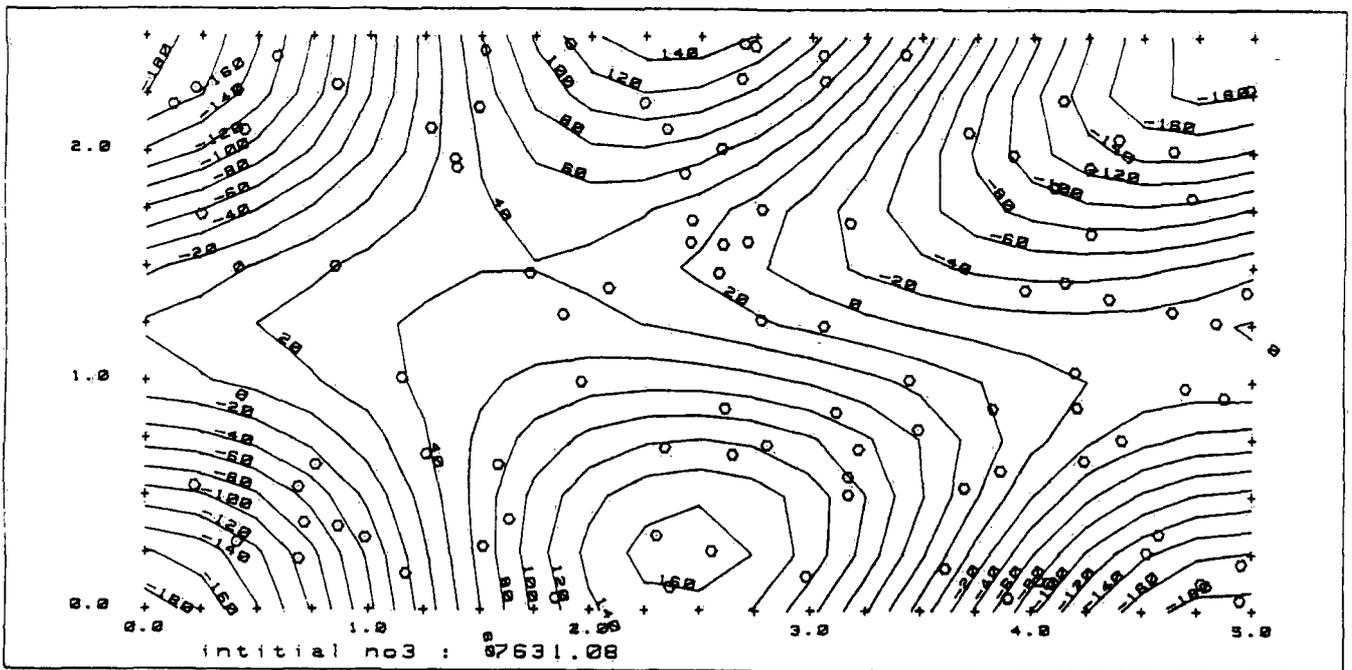
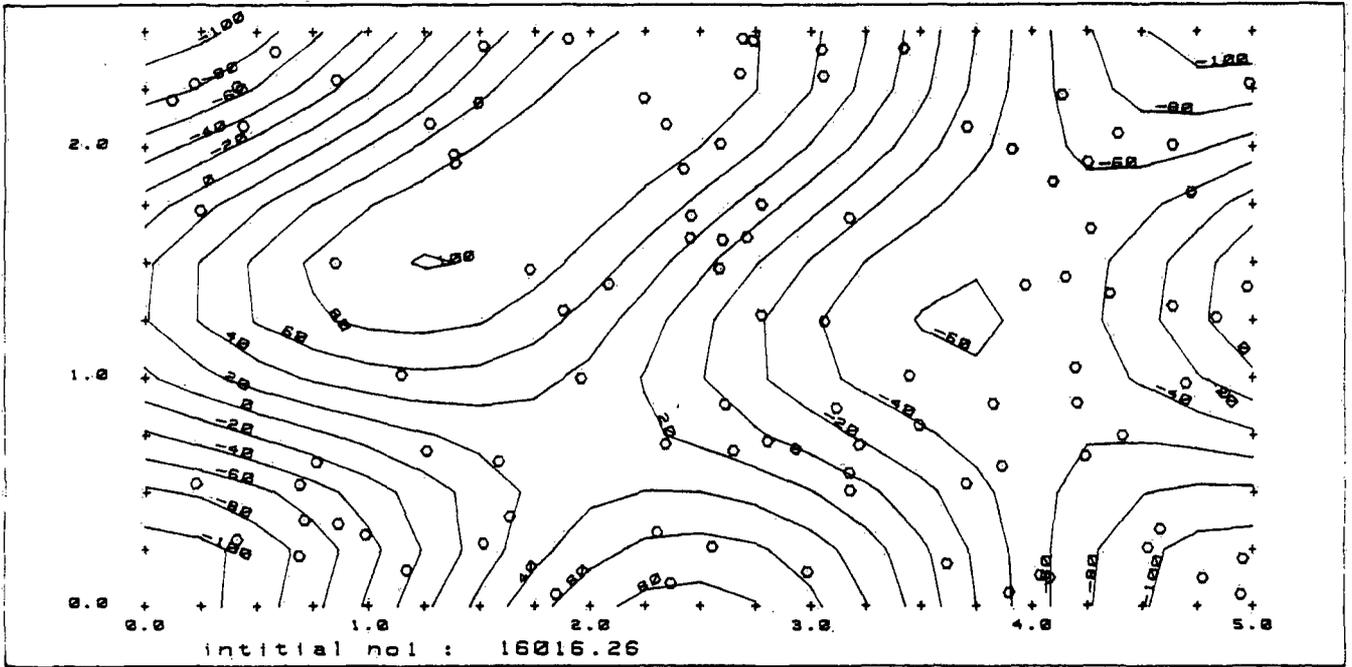


figure 7.a.

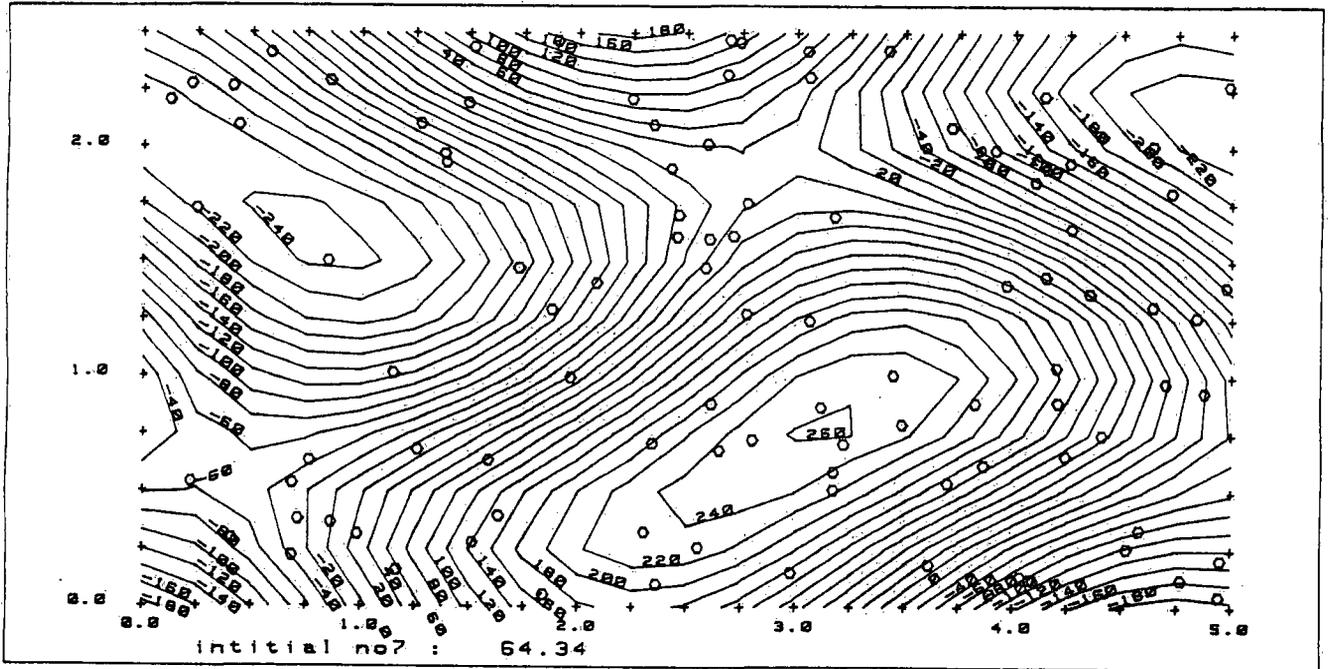
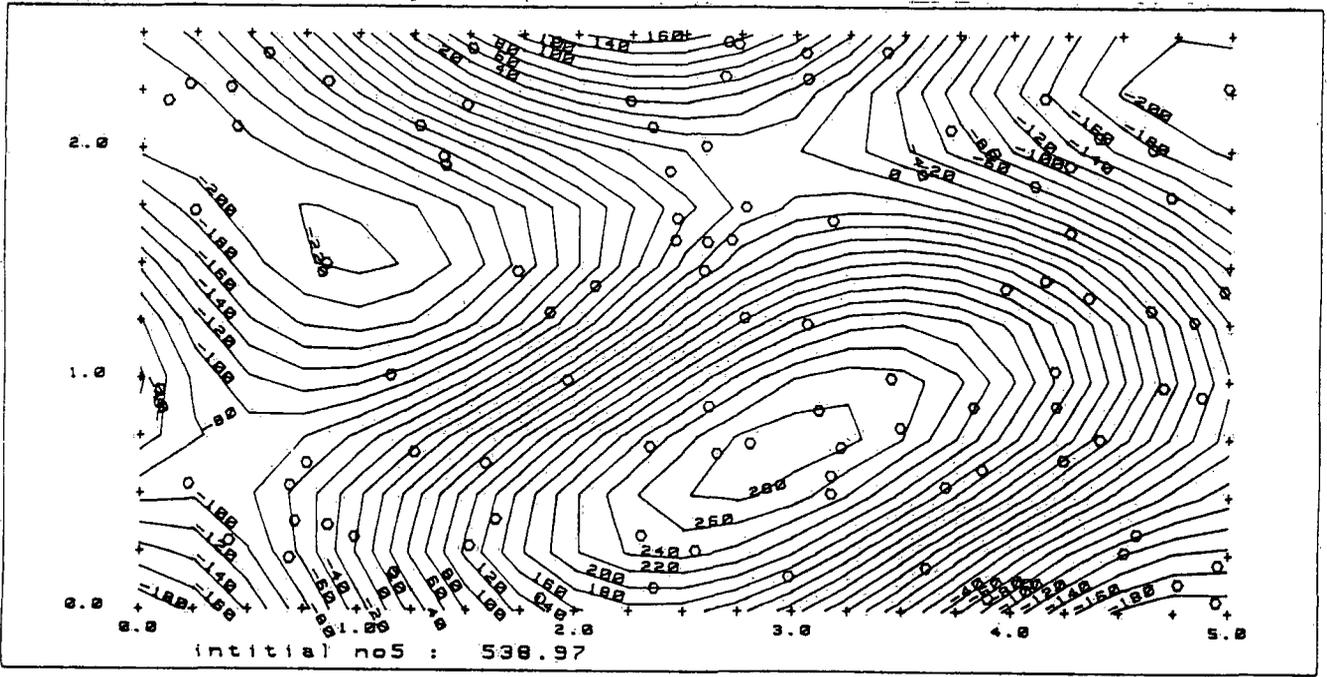


figure 7.b.

La convergence de la relaxation dépend fortement du nombre de stations d'observation disponibles. Toutes choses étant égales par ailleurs, trois autres simulations ont été réalisées avec  $N = 75$ , 50 et 25 stations. Une fonction optimale normalisée  $\bar{\delta} = N^{-1} \cdot J$ , mesurant l'écart moyen par station séparant le champ observé du champ élaboré par la méthode adjointe, a été introduite. La figure 8 illustre les résultats obtenus. Les huit premières itérations de la fonction optimale normalisée  $\bar{\delta}$  sont représentées pour 100, 75, 50 et 25 stations.

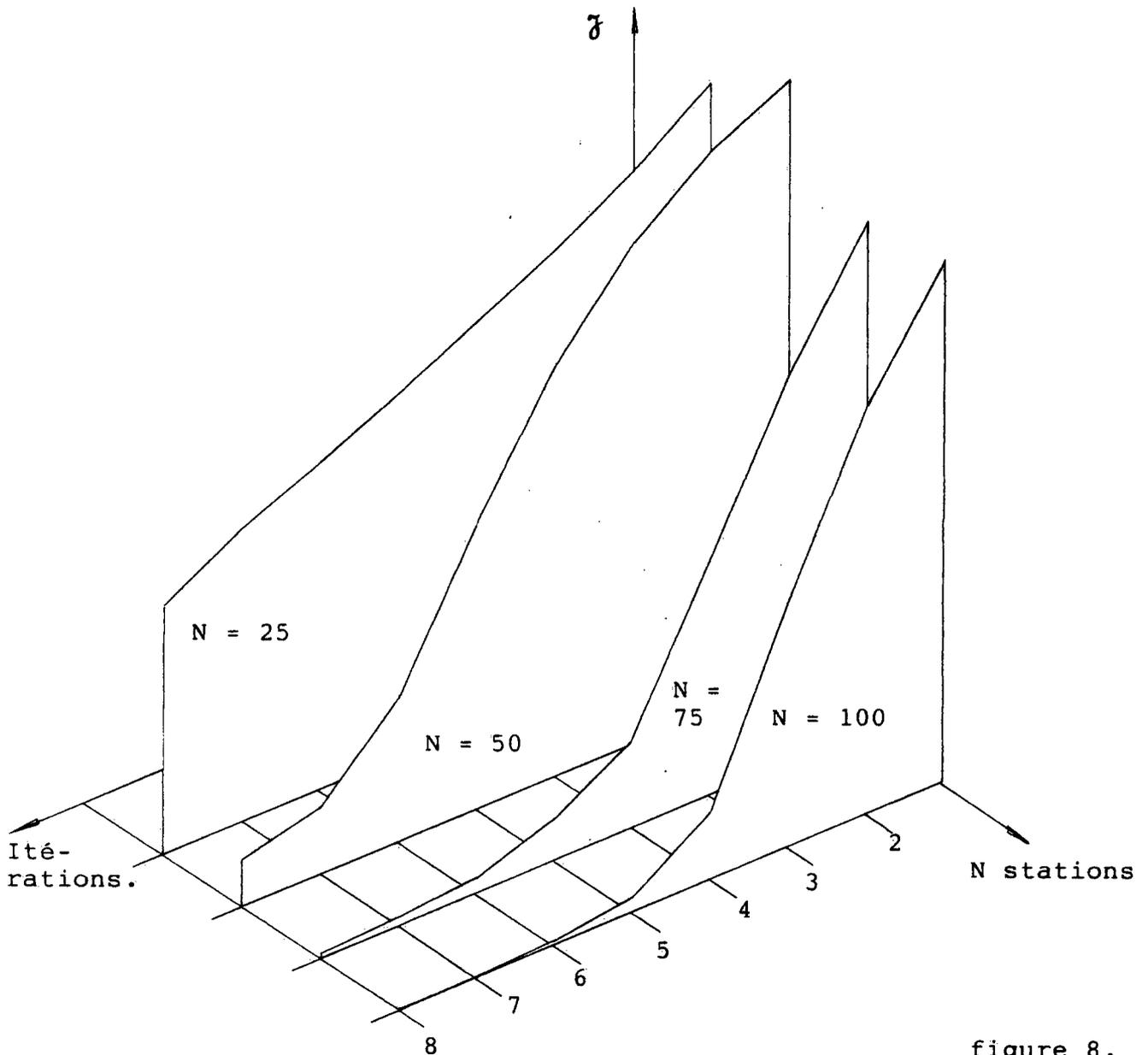


figure 8.

## IX. Perspectives - Conclusion.

La méthode adjointe n'a pas encore quitté le domaine expérimental. De nombreuses questions demeurent sans réponse, tant au plan théorique que pratique, et laissent ouvertes toute une série de perspectives.

L'évolution des techniques d'observation météorologique est telle que le volume des données **asynoptiques** disponibles croît constamment avec, notamment, l'intégration d'informations provenant des satellites, des radars, des réseaux automatiques. La méthode adjointe, **spatio-temporelle**, est parfaitement adaptée à l'assimilation massive de telles données. Le terme inhomogène de forçage peut être développé en sorte d'établir une pondération entre les diverses sources d'information disponibles, tenant compte par exemple du caractère lacunaire ou intermittent de certaines d'entre elles.

Les **modèles adaptatifs** sont également concernés. La fonction optimale est alors conçue en sorte de mesurer l'écart séparant la prévision du modèle englobant de celle du modèle englobé. Le terme inhomogène est établi en conséquence. Un dispositif mixte, incluant simultanément le mode adaptatif et un processus classique d'acquisition de données d'observation est tout à fait plausible.

Dans tout le présent travail, le gradient de la fonction optimale à été calculé par rapport à la condition initiale livrée au modèle direct. Il est parfaitement loisible de déterminer le gradient d'une fonction optimale, habilement choisie, par rapport à n'importe quel paramètre interne du modèle direct. Ainsi utilisée, la technique adjointe est une méthode de **diagnostic** pouvant être mise en oeuvre pour discerner les propriétés spécifiques du modèle direct, tant en phase de développement qu'au cours de la routine opérationnelle.

Le processus d'optimisation choisi dans le présent travail, des plus simples, est également l'un des moins efficaces. Des vitesses de convergence bien supérieures peuvent être atteintes à l'aide de l'un des autres algorithmes suggérés au paragraphe VII. Ceux-ci requièrent cependant des **calculs numériques** dont le volume peut être totalement **inabordable**.

Plus grave encore, le modèle barotrope est conservatif, soit **réversible**. Cette propriété est nécessaire à l'unicité du minimum de la

fonction optimale. Un modèle plus élaboré, dans lequel interviendraient des processus irréversibles, serait tel que la fonction optimale pourrait posséder **plusieurs minimas locaux**. Dans de telles circonstances, un processus d'optimisation sans contraintes ne serait plus à même de déterminer un minimum absolu de la fonction optimale, ni non plus une condition initiale optimale.

Foin de pessimisme. Les ordinateurs à venir, dotés d'architectures massivement **parallèles**, seront mieux à même d'aborder des problèmes numériques portant sur de vastes ensembles de données. Des méthodes d'optimisation susceptibles de prendre en compte l'existence de multiples minimas locaux sont en voie de développement. Enfin, une formulation plus efficace du problème adjoint n'est pas exclue.

La méthode adjointe est basée sur des fondements mathématiques irréprochables. Difficile, elle requiert de la part des équipes engagées en recherche et développement des compétences élevées et un important volume de travail.

L'évolution des techniques tant informatiques que numériques laisse augurer de la mise en oeuvre d'applications opérationnelles au cours de la prochaine décennie.

Cette perspective est dans une certaine mesure imposée par l'explosion du volume des données d'observation, explosion que les techniques classiques d'analyse météorologique ne sont pas à même d'absorber.

Adresse de l'auteur:

Jacques Ambühl  
Centre Météorologique de l'aéroport de Genève  
CH-1215 **Genève 15**

## X. Bibliographie.

La petite bibliographie présentée ci-dessous, incomplète, ne mentionne que les publications sur lesquelles je me suis basé et omet donc des publications plus récentes relatives au même sujet.

METEOROLOGICAL TRAINING COURSE : METEOROLOGICAL DATA ANALYSIS.

Lecture Note No. 2.2  
P Lönnberg - A. Hollingsworth.  
ECMWF.

ANALYSIS METHODS FOR NUMERICAL WEATHER PREDICTION.

A.C. Lorenc.  
Quart J.R. Met. Soc. (1986) 112, pp 1177-1194.

EXPERIMENTS IN DATA ASSIMILATION USING THE ADJOINT MODEL TECHNIQUE.

P. Courtier  
ECMWF Workshop on high resolution analysis. June 1985.

THE ADJOINT METEOROLOGICAL TECHNIQUE AND METEOROLOGICAL APPLICATIONS.

O. Talagrand  
ECMWF Workshop on high resolution analysis. June 1985.

VARIATIONAL ALGORITHMS FOR ANALYSIS AND ASSIMILATION OF METEOROLOGICAL OBSERVATIONS : THEORETICAL ASPECTS.

F.X. Le Dimet, O. Talagrand  
Tellus (1986) 38A, 97-110.

PROGRAMMATION NON LINEAIRE.

D. De Werra  
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne  
Département de mathématiques.

NUMERICAL PREDICTION AND DYNAMIC METEOROLOGY

Second edition.  
G.J. Haltiner, R.T. Williams  
John Wiley and sons.

